ΘΕΩΡΗΜΑ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Έστω $U\subset\mathbb{R}^n$ ανοικτό, $x_0\in U$, $f\in C^1(U,\mathbb{R}^n)$
$\det Df(x_0)\neq 0 \Rightarrow \exists\, U_0\subset U$, U_0 ανοικτό, $x_0\in U_0$ και
$B=B(f(x_0),\varepsilon)$, $\varepsilon>0$ έτσι ώστε $f|_{U_0}: U_0\to B$ 1-1
και επί με $g^{-1}\in C^1(B,\mathbb{R}^n)$, $\det Dg(x)\neq 0$
$\forall x\in U_0$ και $(Dg^{-1})(g(x))=(Dg(x))^{-1}$ $\forall x\in U_0$
(π.χ. $(f^{-1})'(f(x))=(f'(x))^{-1}$)

ΠΡΟΣΟΧΗ

Το θεώρημα αντίστροφης συνάρτησης λέει ότι αν έχουμε ένα συνεχώς διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο το οποίο σε ένα σημείο x_0 έχει αντιστρέψιμη (ως πίνακας) παράγωγο, τότε το πεδίο είναι αντιστρέψιμη συνάρτηση σε κάποια περιοχή του x_0 (δηλ. τοπικά γύρω από το x_0) και η αντίστροφη συνάρτηση είναι και αυτή συνεχώς διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο με παράγωγο τον αντίστροφο της παραγώγου του αρχικού πεδίου

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $F: U\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $F(x,y)=f(x)-y \Rightarrow F\in C^1(U\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$
$F(x_0,f(x_0))=0$, $\det\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,f(x_0))=\det Df(x_0)\neq 0 \Longrightarrow$
ΘΠΣ $\Longrightarrow (\exists\, \varepsilon,\delta>0)(\forall y\in B)$ με $B=B(f(x_0),\varepsilon)$ $\exists!\, h(y)\in B(x_0,\delta)\subset U$
τ.ω: $F(h(y),y)=0 \Rightarrow f(h(y))=y$
$h\in C^1(B,\mathbb{R}^n)$, $\det\frac{\partial F}{\partial x}(h(y))\neq 0$, $\forall y\in B$
$\quad = \det Df(h(y))$
$Dh(y)=(Df(h(y)))^{-1}$
Η συνάρτηση $h: B\to U_0=B(x_0,\delta)\cap f^{-1}(B)$ είναι
1-1 και επί και έχουμε $h=g^{-1}$
[επί: $\forall x\in U_0: f(x)\in B \Leftrightarrow f(U_0)\subset B$
$(\forall y\in B)(\exists\, x:=h(y)\in B(x_0,\delta)\subset U)$ και $f(h(y))=y\in B$
δηλ. $x\in f^{-1}(B) \Rightarrow (\forall y\in B)(\exists x\in U): f(x)=y \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall y\in B: y\in f(U_0) \Leftrightarrow B\subset f(U_0)$, Άρα $f(U_0)=B$
1-1: $(\forall y\in B)(\exists!\, h(y))\; h(y)=x\in U_0: f(x)=y \Rightarrow x=g^{-1}(y))$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

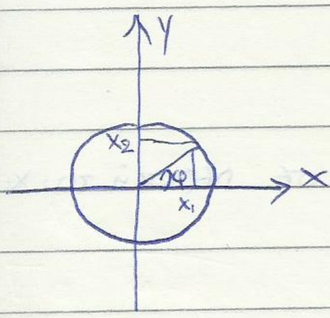
Πολικές συντεταγμένες

$f:(0,\infty)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, $f(r,\varphi)=(r\cdot\cos\varphi,\ r\cdot\sin\varphi)$

με $x_1=r\cdot\cos\varphi$, $x_2=r\cdot\sin\varphi$

Από τις πολικές συντεταγμένες μέσω της f στις καρτεσιανές συντεταγμένες

Επομένως, $f\in C^\infty$



$$Df(r,\varphi)=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{pmatrix}$$

$$\det Df(r,\varphi)=r(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=r>0$$

$\forall (r,\varphi)$ εν $(0,\infty)\times\mathbb{R}\ \xRightarrow[\text{ΘΠΣ}]{}$

$\Longrightarrow$ η f αντιστρέφεται τοπικά γύρω από κάθε σημείο (r_0,φ_0), η αντίστροφη είναι C^1 και έχουμε

$$Df^{-1}(\underbrace{f(r,\varphi)}_{=(x_1,x_2)})=(Df(r,\varphi))^{-1}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\frac{\sin\varphi}{r} & \frac{\cos\varphi}{r}\end{pmatrix}$$

Αν θέσουμε $(x_1,x_2)=f(r,\varphi)=(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)$

τότε $r^2=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$, $\dfrac{x_1}{r}=\dfrac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}$, $\dfrac{x_2}{r}=\dfrac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}$

$$(Df^{-1})(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} & \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\\ -\frac{x_2}{x_1^2+x_2^2} & \frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}\end{pmatrix}\quad \forall (x_1,x_2)\in B$$

με $f(r_0,\varphi_0)\in B$.

Κανονικά, $\tilde f(r,\varphi)=(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\ \forall (r,\varphi)\in\mathbb{R}^2\Rightarrow \tilde f\in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ όμως περιοριζόμαστε στο $f(0,\infty)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ για να 'ναι σαφές ότι η ακτίνα. Παρόλα αυτά ούτε και αυτή η f αντιστρέφεται (Είναι επί στο $f((0,\infty)\times\mathbb{R})=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ αλλά δεν είναι 1-1 αφού πχ $f(r,\varphi+2k\pi)=f(r,\varphi)\ \forall k\in\mathbb{Z}$)

Μπορούμε ωστόσο να περιορίσουμε την f στο $f:(0,\infty)\times[0,2\pi)\to\mathbb{R}^2$ αλλά τότε το πεδίο ορισμού δεν είναι ανοιχτό ($\Rightarrow$ προβλήματα ως προς διαφόριση στα σημεία $\varphi=0$) Άρα, την περιορίζουμε στο $(0,\infty)\times(0,2\pi)$ ή στο $(0,\infty)\times(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

Αν περιορισθεί η f στο $(0,\infty)\times\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ μπορούμε να υπολογίσουμε ρητά (και ανεξάρτητα από ΘΑΣ)

αφού $\frac{x_2}{x_1}=\tan\varphi$, $\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \varphi = \mathrm{Arctan}\,\frac{x_2}{x_1}$ και

άρα

$$f^{-1}(x_1,x_2)=\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2},\ \mathrm{Arctan}\,\frac{x_2}{x_1}\right)$$

Δίδαγμα ΘΑΣ:

$F\in C^1(U,\mathbb{R}^\nu)$, $\det Df(x)\neq 0 \Longrightarrow \exists$ f αντιστρέψ. σε περιοχή του x_0